$A(k) = Log(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}) - 2Log(1+\sqrt{2}) - \alpha^2$

3°/ a) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbf{N}$ ; $0 \le U_n < \alpha$

*pour $n = 0$ , $U_0 = 0 \Rightarrow 0 \le U_0 < \alpha$

*Supposons que pour un entier donné $n$ ; $0 \le U_n < \alpha$ et montrons que $0 \le U_{n+1} < \alpha$

on a : $\begin{cases} 0 \le U_n < \alpha \\ f \text{ est strictement croissant sur R} \end{cases}$ donc $f(0) \le f(U_n) < f(\alpha)$

or $f(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} > 0$ ; $f(U_n) = U_{n+1}$ et $f(\alpha) = \alpha$ d'où $0 \le U_{n+1} < \alpha$

***Conclusion*** : $\forall n \in \mathbf{N}$ ; $0 \le U_n < \alpha$

b) $\forall n \in \mathbf{N}$ ; $U_{n+1} - U_n = f(U_n) - U_n = \varphi(U_n)$ ; d'après le tableau des variations de $\varphi$ (**B**-1°/) on a : $\forall x \in ]-\infty, \alpha[$ : $\varphi(x) > 0$ et comme $\forall n \in \mathbf{N}$ ; on a $0 \le U_n < \alpha$ donc $\forall n \in \mathbf{N}$ ; $\varphi(U_n) > 0$ ce qui prouve que la suite $(U_n)$ est croissante.

* La suite $(U_n)$ est croissante et majorée par $\alpha$ donc la suite$(U_n)$ est convergente vers un réel *l*.

D'autre part, *f* est continue sur **R**, en particulier en *l* donc $f(l) = l \Rightarrow \varphi(l) = 0$ or l'équation $\varphi(x) = 0$ admet $\alpha$ comme seule solution d'où $l = \alpha$

c) Pour tout entier naturel *n*,

$U_n \le x \le \alpha \Rightarrow f(U_n) \le f(x) \le f(\alpha)$ car *f* est croissante sur **R** d'où $\forall n \in \mathbf{N}$ ; si $x \in [U_n, \alpha]$ alors $U_{n+1} \le f(x) \le \alpha$ ( car $U_{n+1} = f(U_n)$ et $f(\alpha) = \alpha$ )

En intégrant sur $[U_n, \alpha]$ on obtient :

$$\int_{U_n}^{\alpha} U_{n+1}\,dx \le \int_{U_n}^{\alpha} f(x)dx \le \int_{U_n}^{\alpha} \alpha dx \Rightarrow U_{n+1}[x]_{U_n}^{\alpha} \le \int_{U_n}^{\alpha} f(x)dx \le \alpha[x]_{U_n}^{\alpha}$$

$$\Rightarrow U_{n+1}(\alpha - U_n) \le \int_{U_n}^{\alpha} f(x)dx \le \alpha(\alpha - U_n) \text{ or } \forall n \in \mathbf{N} ; U_n < \alpha$$

$$\text{donc } U_{n+1} \le \frac{1}{\alpha - U_n} \int_{U_n}^{\alpha} f(x)dx \le \alpha$$